

04 novembre 2025

Corrigé 7

**Exercice 1.** Échelonner les matrices suivantes pour obtenir une matrice ligne équivalente et sous une forme échelonnée réduite, et noter les opérations élémentaires effectuées à chaque étape de calcul :

$$(a) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R}),$$

$$(b) B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 5}(\mathbb{R}),$$

$$(c) C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -2 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{4 \times 6}(\mathbb{R}).$$

**Solution 1.** On présente à chaque fois une suite d'opérations élémentaires possible pour arriver à la matrice échelonnée réduite, mais cette suite d'opérations n'est pas unique. Cependant, la matrice échelonnée réduite est unique.

On effectue souvent des échanges de lignes pour simplifier, lorsque c'est possible : cela nous permet d'avoir un 1 comme pivot sans faire apparaître trop de fractions.

(a) Pour la matrice  $A$ , on effectue les opérations suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow -2L_1 + L_3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \rightarrow L_1 + L_4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow -L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \rightarrow -L_2 + L_4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Pour la matrice  $B$ , on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -3L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 17 & -5 \\ 2 & 2 & -2 & 13 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 13 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow -2L_1 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 17 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & 25 & -9 \\ 2 & 3 & -2 & 13 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \rightarrow -2L_1 + L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 17 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & 25 & -9 \\ 0 & 3 & -4 & 25 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{l} L_3 \rightarrow -2L_2 + L_3 \\ L_4 \rightarrow -3L_2 + L_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 17 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -38 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 17 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -38 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & 9 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{L_4 \rightarrow -\frac{1}{21}L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 17 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -38 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow 38L_4 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 17 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{51}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 17 & -\frac{86}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{51}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \rightarrow -17L_2 + L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{51}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{L_3 \rightarrow -L_1 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 & \frac{65}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{51}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow 6L_4 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{47}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{51}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(c) Pour la matrice  $C$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -2 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \rightarrow 3L_1 + L_2 \\ L_3 \rightarrow -4L_1 + L_3 \\ L_4 \rightarrow -2L_1 + L_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -12 & 14 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 14 & -16 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 10 & -9 & -2 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 14 & -16 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -12 & 14 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 10 & -9 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -14 & 16 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -12 & 14 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 10 & -9 & -2 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{\begin{array}{l} L_3 \rightarrow -5L_2 + L_3 \\ L_4 \rightarrow 3L_2 + L_4 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -14 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 58 & -66 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -32 & 39 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -14 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -32 & 39 & -5 \\ 0 & 0 & -10 & 58 & -66 & 5 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{L_4 \rightarrow 2L_3 + L_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -14 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -32 & 39 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 12 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \rightarrow -\frac{1}{6}L_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -14 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -32 & 39 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{L_3 \rightarrow 32L_4 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -14 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -25 & \frac{65}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow \frac{1}{5}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -14 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{L_2 \rightarrow 14L_4 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -12 & \frac{32}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -2L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$L_1 \xrightarrow{3L_4+L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} L_1 \xrightarrow{-L_2+L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.** Soient  $V$  et  $W$  deux  $K$ -espaces vectoriels de dimension finie et  $\phi \in \mathcal{L}(V, W)$ . Soient  $B_V, B_W$  des bases ordonnées de  $V$  et  $W$ , respectivement. Montrer que  $\phi$  est bijective si et seulement si  $[\phi]_{B_V, B_W}$  est une matrice inversible.

**Solution 2.** Supposons d'abord que  $\phi$  est bijective. Par un corollaire du théorème du rang, on a que  $\dim V = \dim W$ ; notons cette dimension par  $n$ . Donc  $[\phi]_{B_V, B_W} \in M_n(K)$ . De plus, il existe une application inverse  $\psi : W \rightarrow V$ , c'est-à-dire une application linéaire  $\psi : W \rightarrow V$  telle que  $\phi \circ \psi = \text{id}_W$  et  $\psi \circ \phi = \text{id}_V$ .

Donc  $I_n = [\text{id}_W]_{B_W, B_W} = [\phi \circ \psi]_{B_W, B_W} = [\phi]_{B_V, B_W} [\psi]_{B_W, B_V}$  et pareil dans l'autre sens, ce qui montre que  $[\phi]_{B_V, B_W}$  est inversible (avec inverse  $[\psi]_{B_W, B_V}$ ).

Maintenant, on suppose que  $[\phi]_{B_V, B_W}$  est inversible; en particulier, c'est une matrice carrée et donc  $\dim V = \dim W$ .

On pose  $B = ([\phi]_{B_V, B_W})^{-1}$ . Soit  $\Theta : \mathcal{L}(W, V) \rightarrow M_n(K)$  l'application linéaire bijective associée aux choix de bases  $B_W, B_V$ ; c'est-à-dire que  $\Theta(\alpha) = [\alpha]_{B_W, B_V}$ , pour  $\alpha \in \mathcal{L}(W, V)$ . Par la surjectivité de  $\Theta$ , il existe une application linéaire  $\psi : W \rightarrow V$  avec  $\Theta(\psi) = B$ , c'est-à-dire que  $[\psi]_{B_W, B_V} = B$ .

On a donc  $[\psi]_{B_W, B_V} [\phi]_{B_V, B_W} = I_n$  et  $[\phi]_{B_V, B_W} [\psi]_{B_W, B_V} = I_n$ . Par conséquent  $[\phi \circ \psi]_{B_W, B_W} = I_n$  et  $[\psi \circ \phi]_{B_V, B_V} = I_n$ . Par la correspondance bijective entre  $\mathcal{L}(V, V)$  et  $M_n(K)$  et entre  $\mathcal{L}(W, W)$  et  $M_n(K)$ , on déduit que  $\phi \circ \psi = \text{id}_W$  et  $\psi \circ \phi = \text{id}_V$  ce qui montre que  $\phi$  est bijective.

**Exercice 3.** Soit  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$ . Pour  $1 \leq r \leq m$  et  $\lambda \in K^\times$ , posons  $D_r(\lambda) \in \text{GL}(m, K)$  la matrice dont le coefficient  $D_r(\lambda)_{ij}$  satisfait

$$D_r(\lambda)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \neq r \\ 0, & \text{si } i \neq j \\ \lambda, & \text{si } i = j = r \end{cases}.$$

Démontrer que  $D_r(\lambda)$  est la matrice élémentaire associée à l'opération élémentaire  $A_r \rightarrow \lambda \cdot A_r$ .

**Solution 3.** Soit  $E_{ij}$  la matrice de  $\mathbb{M}_m(K)$ , définie par  $(E_{ij})_{kl} = 1$  si  $k = i$  et  $\ell = j$ , et  $(E_{ij})_{kl} = 0$  sinon. On a alors  $D_r(\lambda) = \sum_{s=1}^m E_{ss} + (\lambda - 1)E_{rr}$ , d'où  $(D_r(\lambda)A)_{ij} = (\sum_{s=1}^m E_{ss}A)_{ij} + ((\lambda - 1)E_{rr}A)_{ij} = \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^m (E_{ss})_{ik} A_{kj} + (\lambda - 1) \sum_{k=1}^m (E_{rr})_{ik} A_{kj}$ . Comme  $(E_{ss})_{ik} \neq 0$  seulement si  $k = s$ , la première double somme devient  $\sum_{s=1}^m (E_{ss})_{is} A_{sj}$ . De même, comme  $(E_{rr})_{ik} \neq 0$  seulement si  $k = r$ , la deuxième somme est égale à  $(\lambda - 1)\delta_{ir} A_{rj}$ . On a

$$(D_r(\lambda)A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } i \neq r \\ A_{rj} + (\lambda - 1)A_{rj} = \lambda A_{rj} & \text{si } i = r \end{cases}.$$

**Exercice 4.** Résoudre le système suivant. Trouver une base de l'espace des solutions.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3z + 11t - 10u = 0 \\ -x - 2y + 2z + 5t + 6u = 0 \\ \phantom{-x - 2y} 4z + 12t - 2u = 0 \\ 3x + 6y - 2z - 3t + 5u = 0 \end{cases}$$

**Solution 4.** On écrit le système sous la forme  $AX = 0$  avec  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 11 & -10 \\ -1 & -2 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & -2 \\ 3 & 6 & -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ . On

va faire une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de la matrice  $A$  pour obtenir une matrice échelonnée réduite.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 11 & -10 \\ -1 & -2 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & -2 \\ 3 & 6 & -2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \rightarrow 2L_2 + L_1]{L_4 \rightarrow 3L_2 + L_4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & 21 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 23 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \rightarrow \frac{1}{2}L_3]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 21 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 23 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow[L_2 \rightarrow -3L_3 + L_2]{L_1 \rightarrow -L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 23 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \rightarrow -4L_2 + L_4]{L_3 \rightarrow -2L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow[L_1 \rightarrow 2L_2 + L_1]{L_3 \rightarrow -\frac{1}{11}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \rightarrow -3L_3 + L_4]{L_1 \rightarrow -4L_1 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Donc les inconnues principales sont  $x, z, u$  et les inconnues libres sont  $y$  et  $t$ . Les solutions sont

$$\begin{cases} x = -2y - t \\ z = -3t \\ u = 0 \end{cases} \quad \text{avec } y, t \text{ libres.}$$

Pour trouver une base échelonnée réduite de cet espace de solutions, on pose  $y = 1, t = 0$  et on obtient  $f_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$  et de même si on pose  $y = 0$  et  $t = 1$ , alors on obtient  $f_2 = (-1, 0, -3, 1, 0)$ . Alors  $(f_1, f_2)$  est une base échelonnée réduite de cet espace de solutions.

**Exercice 5** (Résultat à retenir). Soit  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$ . Soit  $C_j$  la  $j$ -ème colonne de  $A$  et posons  $W = \text{Vect}(C_1, \dots, C_n) \subset K^m$ . Soit  $j_1 < j_2 < \dots < j_r$  les échelons dans la forme échelonnée réduite de  $A$ . Montrer que les colonnes  $C_{j_1}, C_{j_2}, \dots, C_{j_r}$  forment une base de  $W$ .

(Notez que ce résultat peut être utilisé pour trouver une base de l'image d'une application linéaire après avoir échelonné la matrice de l'application.)

**Solution 5.** Soit  $\phi : K^n \rightarrow K^m$  une application linéaire dont la matrice par rapport aux bases canoniques est la matrice  $A$ . Soit  $P \in M_m(K)$  une matrice inversible telle que  $PA$  soit échelonnée réduite. ( $P$  est le produit des matrices élémentaires utilisées dans l'échelonnage de  $A$ .) Soit  $\psi : K^m \rightarrow K^m$  l'application linéaire bijective dont la matrice est  $P$ .

Comme  $PA$  est échelonnée réduite avec échelons  $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ , les colonnes correspondantes de  $PA$  sont linéairement indépendantes; c'est-à-dire,  $(\psi \circ \phi)(e_{j_1}), (\psi \circ \phi)(e_{j_2}), \dots, (\psi \circ \phi)(e_{j_r})$  sont linéairement indépendants. De plus, comme  $\psi$  est bijective,  $\phi(e_{j_1}), \phi(e_{j_2}), \dots, \phi(e_{j_r})$  sont aussi linéairement indépendants. Mais ce sont précisément les colonnes  $C_{j_1}, C_{j_2}, \dots, C_{j_r}$ . Enfin on a que  $\text{rang}(A) = \dim W = r$ , et donc  $C_{j_1}, \dots, C_{j_r}$  forment une base de  $W$ , où  $W = \text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_n) \subset K^m$  et  $e_j$  désigne le  $j$ -ième vecteur de la base canonique de  $K^n$ .